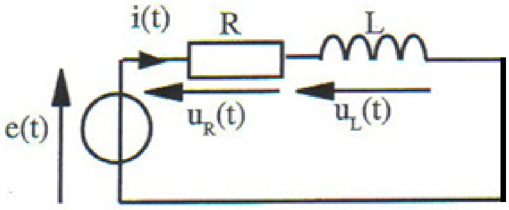
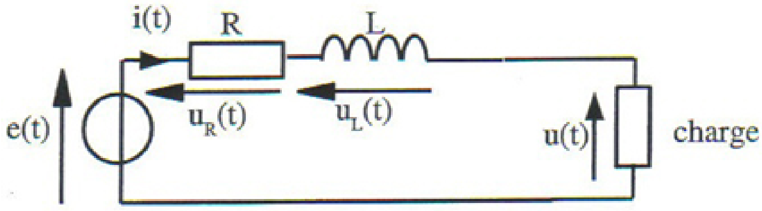
Électricité





1. Le circuit *de gauche* étant soumis à un échelon de tension à $t = 0$, déterminer :

— $i(0^+)$, $u_L(0^+)$, i_∞, $u_{L\infty}$;

— la durée caractéristique τ du régime transitoire si $L = 80\,\text{mH}$ et $R = 100\,\Omega$.

2. Le circuit *de gauche* étant soumis à une tension sinusoïdale, en régime établi :

— montrer que la tension $u_L(t)$ résulte d'un filtrage passe-haut de la tension d'entrée ; donner le gain maximal et la pulsation de coupure du filtre ;

— déterminer les caractéristiques de la tension $u_L(t)$, si $e(t) = E\cos(1000\,t)$.

3. Le circuit *de droite* étant en régime sinusoïdal établi de fréquence 50 Hz, déduire des informations suivantes la nature de la charge (inductive ou capacitive) et ses caractéristiques, ainsi que la valeur efficace de la tension d'alimentation.
Calculer également la puissance moyenne fournie par la source. On indique que :

— le retard de phase φ de la tension $u(t)$ sur l'intensité est tel que $\cos\varphi = 0,80$;

— les valeurs efficaces de $u(t)$ et $i(t)$ valent respectivement 11,1 V et 80 mA.

Mécanique

d'après CCMP 2022, 2e épreuve de physique MP (épreuve sans calculatrice)

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches ($\vec{v}$) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\widehat{e}_x\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$.

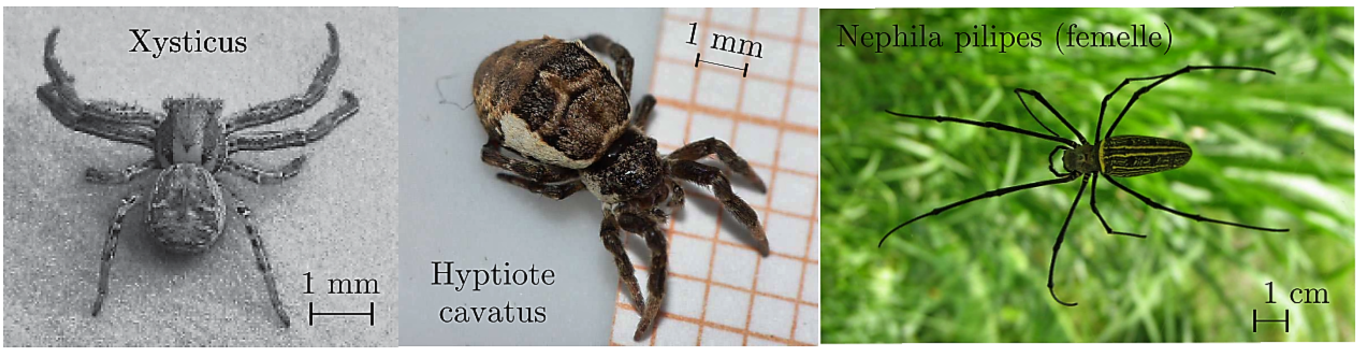


FIGURE 1 – *Xysticus sp.* est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

1 Propriétés mécaniques des fils d'araignées

Dans les films, le super-héros SPIDERMAN, dont on estime la masse à $m = 75\,\mathrm{kg}$, poursuit les voitures en se balançant sur des fils d'immeuble en immeuble.
Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 25\,\mathrm{m}$ sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(t=0) = \pi/2$.
Il se laisse alors entraîner sans vitesse initiale. (Fig. 7).

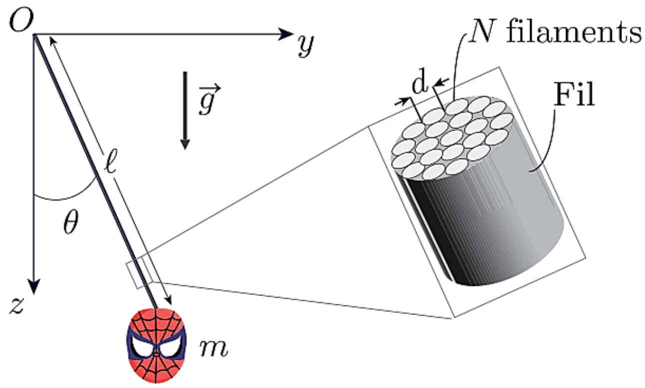


FIGURE 7 – Le vol de SPIDERMAN.

1. Le fil de Spiderman étant considéré inextensible, écrire les équations différentielles de son mouvement (NB : l'angle $\theta(t)$ n'est pas "petit"). En déduire l'expression de la tension $T = f(\theta)$, puis la valeur de tension maximale au cours du mouvement en fonction de m et g.

En fait, le fil de soie d'araignée n'est pas parfaitement inextensible.

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale ℓ_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke : $\dfrac{\delta \ell}{\ell_0} = \dfrac{1}{E}\dfrac{F}{S_0}$ où E est le module de Young du matériau constituant le fil.

2. Quelle sont la dimension et l'unité S.I. usuelle de E ? Montrer que ce modèle revient à assimiler le comportement mécanique du fil à celui d'un ressort de constante de raideur k à exprimer.

3. Déterminer la constante de raideur d'un ressort équivalent à N ressorts identiques disposés en parallèle, chacun de raideur k.

4. On suppose que le "fil" de Spiderman est constitué de N filaments de soie identiques en parallèle. Sachant que le module de Young d'un filament de soie et son rayon valent typiquement $E = 10\,\mathrm{MPa}$ et $a = 5\,\mu\mathrm{m}$, combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que la déformation relative reste inférieure à 1%, ce qu'on estime convenable pour supporter Spiderman lors de son saut (on prendra $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$) ? Commenter le diamètre du fil correspondant.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur ℓ_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de ℓ_0 et situés sur une même horizontale. Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V, dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur ℓ.

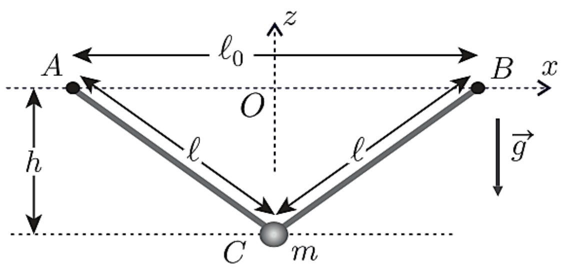


FIGURE 4 – Extension d'un fil.

On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale. Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 4.

5. D'après la question 2, quelle est la constante de raideur d'une moitié de fil AC ou BC ? Exprimer la norme commune des deux forces de rappel exercées en C. En déduire la condition d'équilibre de m, en fonction de $m, g, h, l_0 etk$, la constante de raideur du fil.

6. Montrer que si $h \ll l_0$, alors h est proportionnelle à une puissance de m à préciser.

La figure 5 ci-dessous reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec différentes masses m suspendues à un fil de longueur $l_0 = 5\,\mathrm{cm}$ et $a = 5\,\mu\mathrm{m}$.

7. Vérifier que la loi obtenue à la question précédente est compatible avec l'expérience, et déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil. En déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil. On pourra utiliser la figure 9 du formulaire.

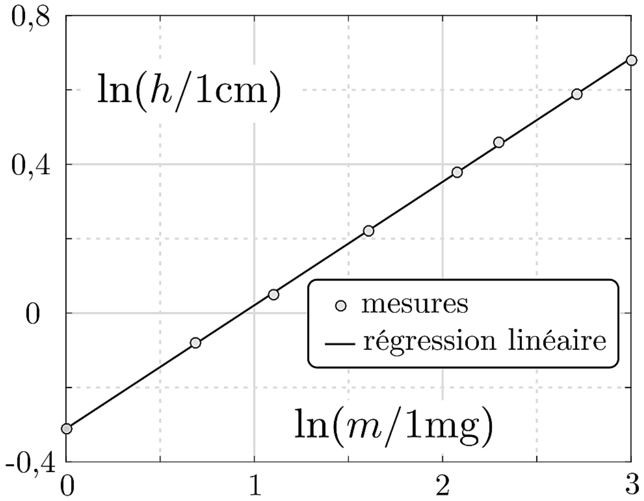


FIGURE 5 – Mesures de $h(m)$.

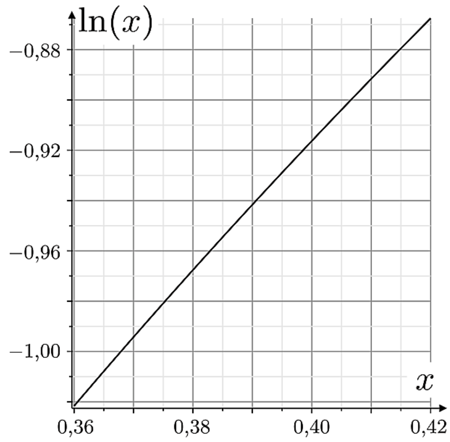


FIGURE 9 – Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0{,}36; 0{,}42]$.

2 Des araignées volantes

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836. Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique d'un tel phénomène.

8. En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de $0{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.

Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge q. Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a $2n$ fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. 2).

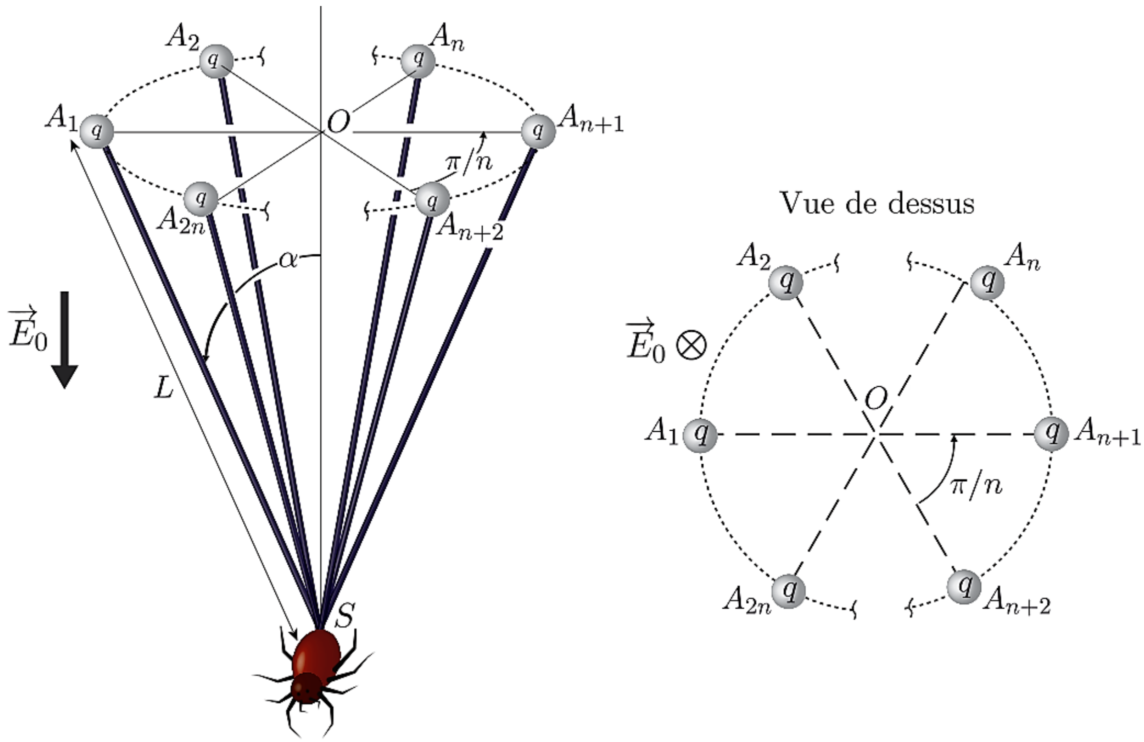


FIGURE 2 – Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

9. Calculer le module de la force électrique contribuant à soulever l'araignée pour $q \approx -1$ nC. Combien de fils seraient-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées dans les conditions exposées ? Commenter ce résultat.

On s'intéresse maintenant à la structure interne du "parachute ascensionnel" de l'araignée.
Le potentiel électrostatique créé sur une charge par les $2n-1$ autres charges s'exprime par :

$$V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L \sin\alpha}\left(1 + 2\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{2n}}\right) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L \sin\alpha}G(n)$$

10. Sans chercher à retrouver cette expression, commenter l'origine des coefficients numériques '1+' et '2x' devant la somme.

11. L'énergie potentielle d'une charge q dans un potentiel V est $E_p = qV$. Justifier que *l'énergie d'interaction électrostatique* du système de charges portées par les fils vaut nqV.

12. En l'absence de champ extérieur, quelle serait la forme d'équilibre de l'éventail ?

13. L'araignée S étant immobile, exprimer l'énergie électrostatique totale du système, tenant compte des interactions et du champ extérieur uniforme $\vec{E}_0$. On rappelle que le potentiel associé à un champ $\vec{E} = E_z\vec{u}_z$ vérifie $\frac{dV}{dz} = -E_z$, et on prendra le potentiel associé à $\vec{E}_0$ nul au sol.

14. En déduire l'équation donnant l'angle α à l'équilibre :

$$\frac{\sin{\alpha_e}^3}{\cos\alpha_e} = \frac{-q}{16\pi\epsilon_0 L^2 E_0}G(n)$$

15. On observe un angle $\alpha_e \approx 30°$ pour un éventail constitué de six soies longues d'un mètre. Que vaut alors la charge q ? On donne $G(3) \approx 38/5$ et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ SI.

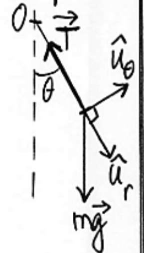
16. Discuter l'influence sur l'angle d'équilibre des valeurs de n, q, L, E_0.

Mécanique

CCMP - Physique 2 MP - 2022

1) PFD en réf. terrestre galiléen, pour m assimilée à un point matériel, en coord. polaires :

$$\begin{cases} mL\ddot\theta = -mg\sin\theta & (1) \\ -mL\dot\theta^2 = -T + mg\cos\theta & (2) \end{cases}$$



L'éq. (1) est l'E.D. du mvmt, soit $\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.}$

L'équation (2) donne $T = f(\theta)$, après avoir utilisé le TEC ou intégré (1) en $\times\dot\theta$:

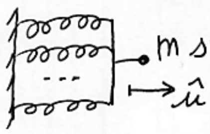
$$\frac{1}{2}\dot\theta^2 - \frac{g}{L}\cos\theta = \frac{1}{2}\dot\theta_0^2 - \frac{g}{L}\cos\theta_0 = 0,$$

et donc $T(\theta) = mg\cos\theta + mL\left(2\frac{g}{L}\cos\theta\right)$

$\underline{T(\theta) = 3mg\cos\theta}$, donc $\underline{T_{max} = T(\theta=0) = 3mg}$.

2) $[E] = \frac{[F]}{L^2}\frac{L}{L}$ donc c'est une pression, en Pa.

$\frac{\delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S_0} \Leftrightarrow F = \frac{E\cdot S_0}{l_0}\,\delta l$ et c'est une force de rappel, donc analogue à celle exercée par un ressort de raideur $\boxed{k = E\cdot S_0/l_0}$.

3) 

m subit $\sum_1^N \vec F_k = \sum_1^N -k\delta l\,\hat u = -\left(\sum_1^N k\right)\delta l\,\hat u$

donc $\boxed{k_{éq} = N\times k}$.

4) $F_{max} = 3\times750\,N$ avec $g = 10\,m/s^2$

$\frac{\delta l}{l_0} = 0{,}01$; $S = \frac{F/E}{\delta l/l_0} = \frac{2250\cdot10^{-7}}{0{,}01} = 0{,}0225\,m^2$.

La section d'un fil étant $\pi a^2 \simeq 7{,}85\cdot10^{-11}\,m^2$, il faut donc environ $\underline{3\cdot10^8}$ fils.

La section totale des fils est alors (plus ou moins) celle d'un disque de 8 cm de rayon, ce qui est trop important.

La soie de Spiderman est donc renforcée !

5) $T = k_{1/2}|\Delta L| = \frac{ES_0}{l_0/2}(l - l_0/2) = \frac{ES_0}{l_0}(2l - l_0)$

Eq. de m : $2T\sin\alpha = mg$ si $\alpha = |(\widehat{AO, AC})|$

soit $2\frac{ES_0}{l_0}\left(2\sqrt{h^2+(l_0/2)^2} - l_0\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+(l_0/2)^2}} = mg$

$2\underbrace{\frac{ES_0}{l_0}}_{k}\left(2 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2+(l_0/2)^2}}\right)h = mg$

6) $h \ll l_0 \Rightarrow (h^2+(l_0/2)^2)^{-1/2} = \frac{2}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(l_0/2)^2}\right)$

d'où $2k\cdot\frac{h^3}{(l_0/2)^2} = mg \Leftrightarrow \boxed{h = \left(\frac{g l_0^2 m}{8k}\right)^{1/3}}$

7) En prenant les points extrêmes, on trouve une pente proche de 1/3 pour ln(h) en fcn de ln(m), ce qui correspond au calcul de Q6.

. l'éq. de la droite est $\ln h = \frac{1}{3}\ln m + \frac{1}{3}\ln\frac{g l_0^2}{8k}$, donc par l'ordonnée à l'origine (m = 1 mg), on a $\frac{1}{3}\ln\frac{g l_0^2}{8k} \simeq -0{,}3 \Leftrightarrow \frac{g l_0^2}{8k} \simeq 0{,}407$ (fig. 9)

$\Leftrightarrow \underline{k \simeq 7{,}7\cdot10^{-3}\,N/m}$.

. On obtient E par Q2, avec $S_0 = \pi a^2$, soit : $\underline{E \simeq 5\,MPa}$.

8) $2 \leq \phi \leq 7$: prenons $r \leq 3{,}5\,mm$ et $\mu \simeq 10^3\,kg/m^3$.

alors $m = \frac{4}{3}\pi r^3\mu \leq \underline{200\,mg}$

9) $\vec F(q) = q\vec E = 1{,}2\cdot10^{-7}\,\vec u_z$ (N)

décollage : $2n\,\|q\vec E\| > \|m\vec g\|$;

avec une "petite" araignée : $r \simeq 1\,mm$, $m \simeq 5$ g

il faut $\underline{2n \gtrsim 400}$ fils : pas possible, il faut un champ plus fort ou du vent !

10) 1 pour la charge en face, 2x pour la symétrie.

11) 2n charges ⇒ si on fait $2n\times qV$, on compte deux fois chaque interaction, donc $\frac{1}{2}\times2nqV$.

12) Eq. pour E_p min, donc $\sin\alpha$ max : $\alpha_e = \pi/2$, fils à plat, charges en cercle autour de l'araignée.

(13) E_p totale $= E_p$ des interactions $+ E_p$ des charges dans E_0

Les charges sont à l'altitude $L\cos\alpha$, et comme $\frac{dV}{dz} = -E_{0,z} = +E_0$ car $\vec{E_0} = -E_0\vec{u_z}$

on a $V(z) = E_0 z$ avec $V_0 = 0$.

Au total, $\underline{E_p = \frac{nq^2}{8\pi\varepsilon_0 L\sin\alpha}G(n) + 2nqE_0L\cos\alpha}$

(14) éq. donné par $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$ soit :

$$\frac{nq^2G(n)}{8\pi\varepsilon_0 L} \times \frac{-\cos\alpha_e}{\sin^2\alpha_e} - 2nqE_0L\sin\alpha_e = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\sin^3\alpha_e}{\cos\alpha_e} = \frac{q\cdot G(n)}{16\pi\varepsilon_0 L^2 E_0}}$$

(15) AN : $\underline{q \simeq 10^{-9}\,C}$.

(16) $\frac{\sin^3}{\cos}$ est une fcn croissante, donc :

- l'éventail s'ouvre si $\left(\begin{array}{l} n \nearrow \text{ (par } G(n)) \\ -q \nearrow \end{array}\right.$
- " se ferme si $\left(\begin{array}{l} L \nearrow \\ E_0 \nearrow \end{array}\right.$

et vice-versa bien sûr.

Électricité

<u>Régime transitoire du 1er ordre</u>

1). l'inductance impose la continuité de i, donc $\underline{i_L(0+) = i(0+) = i(0^-) = 0}$.

- par conséquent, $\underline{u_R(0+) = Ri(0^+) = 0}$, et par addition des tensions $\underline{u_L(0+) = E}$.
- en régime permanent, toutes les grandeurs sont constantes, donc $u_{L\infty} = L\frac{di}{dt} = 0$ et par loi des mailles $\underline{u_{R\infty} = E \Rightarrow i_\infty = \frac{E}{R}}$.
- La loi des mailles donne l'E.D. du circuit : $E = u_R + u_L = Ri + L\frac{di}{dt}$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}} \text{ donc } \underline{\tau = \frac{L}{R} \simeq 0{,}8\,ms}.$$

<u>Filtre passe-haut</u>

2). Par division de tension $\underline{U_L} = \frac{\underline{Z_L}}{R + \underline{Z_L}}\underline{E}$,

soit $\underline{H} = \frac{\underline{U_L}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}}$ avec $\underline{\omega_c = R/L}$.

Le gain max. est $\underline{H_{HF} = 1}$.

et $\underline{\omega_c = R/L}$ est telle que $\underline{H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}}$.

- $\omega_c = 1250$ rad/s $\Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{1000}{1250}}$,

donc $\frac{U_L}{E} = \frac{1}{\sqrt{1+(4/5)^2}} \simeq 0{,}78$

et $\underline{\varphi_{u_L} - \varphi_e = -\arg\left(1 - j\frac{4}{5}\right) = \arctan\frac{4}{5} \simeq 38{,}7° \text{ ou } 0{,}67\,rad}$

<u>Dipôle inconnu</u> • La tension étant en retard sur l'intensité, <u>le dipôle est capacitif</u> et on peut poser son impédance complexe $\underline{Z} = r + 1/jC\omega$.

On a donc $\frac{U_e}{I_e} = Z = \sqrt{r^2 + 1/(C\omega)^2}$

et $\cos\varphi = \cos(\arg(\underline{Z})) = \frac{r}{Z} \Rightarrow Z = \frac{r}{0{,}8}$

$\Big\} \Rightarrow \frac{r}{0{,}8} = \frac{U_e}{I_e} = \frac{11{,}1}{0{,}08} \Leftrightarrow \underline{r = 111\,\Omega}$.

On en déduit $C = \frac{1/\omega}{\sqrt{Z^2 - r^2}} \simeq \underline{38\,\mu F}$.

- L'impédance du circuit est $R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$, de module $Z_{tot} \cong 219\,\Omega$, donc avec $I_{eff} = \frac{E_{eff}}{Z_{tot}}$ il vient $\underline{E_{eff} \simeq 17{,}5\,V}$.
- La source alimente $\underline{Z}_{tot}$, donc fournit $\langle P \rangle = E_e \times I_e \times \cos(\arg(\underline{Z}_{tot})) = \underline{E_e \times I_e \times \frac{R+r}{Z_{tot}} \simeq 1{,}35\,W}$.